

## РАДІОТЕХНІЧНІ КОЛА ТА СИГНАЛИ

УДК 621.372.061

## ПОГОДЖЕНА ФІЛЬТРАЦІЯ: КЛАСИЧНИЙ ЛІНІЙНИЙ ТА НОРМАЛЬНИЙ ФІЛЬТРИ

*Рибін О.І., Ніжебецька Ю.Х., Рибіна І.О.*

Метод нормальної фільтрації [1–3] сигналів певного обраного класу дозволяє чисельно [2,4–6] оцінювати ступінь подібності або відмінності між сигналами того самого класу і інших класів, тобто класифікувати [3,7] або розпізнавати образи. Ідея нормального фільтра полягає у створенні [2,8] дискретного матричного оператора  $\overline{\overline{W}}_N$  ортогонального перетворення для еталонного сигналу  $\overline{S}_{et}$ , такого, що спектр трансформант  $\overline{X}_{\xi_{et}}$  отриманого перетворення

$$\overline{X}_{\xi_{et}} = \overline{\overline{W}}_N \cdot \overline{S}_{et} \quad (1)$$

містить лише одну (першу) ненульову трансформанту. На відміну від загальноприйнятої в теорії дискретних перетворень нумерації, нумерація трансформант нормального перетворення  $\overline{\overline{W}}_N$  починається з одиниці, оскільки (у загальному випадку) постійної складової не містить, що є його найголовнішим недоліком. Тому як саме нормальне перетворення (НП), так і класифікацію при його використанні слід виконувати для центрованих сигналів

**Теоретичні викладки**

Для чисельного оцінювання ступеню подібності або розбіжності досліджуваного (дискретного)  $\overline{S}_t$  та еталонного  $\overline{S}_{et}$  сигналів використовують коефіцієнт трансформант [2, 3, 5]

$$K_{m1} = (\sum_{i=2}^N x_{\xi_i}^2)^{1/2} / x_{\xi_1}, \quad (2a)$$

де  $x_{\xi_i}$  – амплітуди трансформант перетворення (1), або

$$K_{m2} = (\sum_{i=2}^N x_{\xi_i}^2 \cdot a_i^2)^{1/2} / x_{\xi_1}, \quad (2б)$$

де  $a_i$  – діюче значення  $i$ -ї трансформанти.

Трансформанта  $x_{\xi_1}$  завжди обчислюється як

$$x_{\xi_1} = (\sum_{i=1}^N s_{eti} \cdot s_{ti}) / (\sum_{i=1}^N s_{eti}^2)^{1/2}, \quad (3)$$

де  $s_{ti}$ ,  $s_{eti}$  – дискретні відліки досліджуваного та еталонного сигналів.

В разі “малої” відмінності досліджуваного сигналу  $\overline{S}_t$  від еталонного  $\overline{S}_{et}$  амплітуди трансформант з номерами, більшими одиниці, будуть “малими”, що у відповідності до (2) дасть чисельну оцінку таких відмін. Поро-

гові значення “малих” відмін  $K_{m\min}$  та “великих”  $K_{m\max}$  (для сигналів іншого класу) можуть бути оцінені лише на репрезентативній вибірці реалізацій сигналу певного класу (для яких  $\bar{S}_{et} \in$ , наприклад, математичним очікуванням цієї вибірки) та інших класів. Тоді для будь-якого сигналу, перетвореного оператором  $\bar{W}_N$ , якщо  $K_m \leq K_{m\min}$ , то сигнал  $\bar{S}_t$  належить до цього класу, якщо ж  $K_m \geq K_{m\max}$ , то сигнал до цього класу не належить.

Ступінь подібності сигналів  $\bar{S}_t$  та  $\bar{S}_{et}$  можна оцінити за гостротою

$$\Gamma = 1/K_m, \quad (4)$$

що є зручним при аналізі подібності та відмін у часовому вікні. Формули (2), (4) свідчать про нелінійний характер нормального фільтра.

Таким чином, нелінійний нормальний погоджений фільтр призначений для чисельної оцінки подібності та відмін (класифікації) сигналів. Але, можна розглядати часову залежність у вікні значень першої (або будь-якої іншої за номером) трансформанти дискретного ортогонального перетворення, яка співпадає з тестовим сигналом, тоді нормальний фільтр можна використовувати як фільтр класичний лінійний погоджений.

Класичний погоджений лінійний фільтр, як відомо [9], має імпульсну характеристику  $g_{\Pi\Phi}(t) = a \cdot s_{et}(t - t_0)$ , де  $t_0$  - час спостереження (не менший довжини сигналу  $s_{et}(t)$  в часі). Сигнал  $y(t)$  на виході такого фільтра має вигляд кореляційної функції вхідного сигналу

$y(t) = a \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) s_{et}(t - t_0 + \tau) d\tau$ . Максимум такої кореляційної функції для дискретного еталонного сигналу  $\bar{S}_{et}$  має вигляд

$$y(t_0) = \sum_{i=1}^N s_{eti}^2. \quad (5a)$$

При цьому амплітуда першої трансформанти (3) НП еталонного сигналу в момент спостереження  $t_0$  має вигляд

$$x_{\xi_1} = (\sum_{i=1}^N s_{eti}^2) / (\sum_{i=1}^N s_{eti}^2)^{1/2}. \quad (5б)$$

Тобто, при реєстрації відомого сигналу нормальний погоджений фільтр працює (для першої трансформанти) так само, як лінійний погоджений фільтр. В теорії погодженої лінійної фільтрації для оцінки впливу адитивного шуму використовують перетворення Вінера-Хінчина, тобто пряме перетворення Фур'є для обчислення за кореляційною функцією шуму його спектру потужності і зворотне для переходу від спектру потужності до кореляційної функції. Так, в дискретному представленні стовпець спектру потужності  $\bar{P}_{ш}$  шуму  $\bar{P}_{ш} = \bar{F}_n \bar{R}_\tau$ , де  $\bar{R}_\tau$  – стовпець дискретних відліків кореляційної функції;  $\bar{F}_n$  – матричний дискретний оператор прямого перетворення Фур'є, нормований множителем  $1/\sqrt{N}$ ;  $N$  – формат перетворення.

Відомо, що дискретний матричний оператор  $\overline{\overline{F}}_n$  можна утворити добутком двох матриць (кратні перетворення)

$$\overline{\overline{F}}_n = \overline{\overline{P}}_F \cdot \overline{\overline{W}}_N, \quad (6)$$

де  $\overline{\overline{W}}_N$  – матричний оператор дискретного НП;  $\overline{\overline{P}}_F$  – матричний дискретний оператор відповідного до даного нормального кратного перетворення.

Тоді за НП отримаємо спектр  $\overline{\overline{\rho}}_N$  потужностей шуму НП

$$\overline{\overline{\rho}}_N = \overline{\overline{W}}_N \cdot \overline{\overline{R}}_\tau, \quad (7)$$

з якого можна знайти спектр потужностей за Вінером-Хінчиним

$$\overline{\overline{\rho}}_{uu} = \overline{\overline{P}}_F \cdot \overline{\overline{\rho}}_N. \quad (8)$$

Матричний оператор кратного перетворення легко знайти з виразу (6), а саме  $\overline{\overline{P}}_F = \overline{\overline{F}}_n \cdot \overline{\overline{W}}_N^{-1} = \overline{\overline{F}}_n \cdot \overline{\overline{W}}_N^T$ , де  $T$  – знак транспонування.

Оскільки зворотне перетворення Фур'є  $\overline{\overline{F}}_n^{*T} = \overline{\overline{W}}_N^T \cdot \overline{\overline{P}}_F^{*T}$ , то за спектром потужності шуму (якщо його усереднені параметри задані в області перетворення Фур'є), можна знайти нормальний спектр потужності

$$\overline{\overline{\rho}}_N = \overline{\overline{P}}_F^{*T} \cdot \overline{\overline{\rho}}_{uu}. \quad (9)$$

Особливістю використання лінійного погодженого фільтра є його застосування для реєстрації відомих сигналів штучного походження, які можна подовжувати у часі з тим, щоб енергія сигналу на його виході в момент спостереження значно перевищувала енергію шуму. Для погодженого фільтра із зростанням часового інтервалу вхідного сигналу (за рахунок повторень початкового еталона) енергія зростає пропорційно квадрату кількості повторень, в той час, як енергія білого шуму зростає за лінійним законом (5б). Так само, як і для лінійного фільтра, подовження штучного сигналу в нормальному фільтрі призведе до накопичення енергії, такої, що в момент спостереження завжди можна здійснити значне перевищення енергії відгуку над результуючою енергією сигналу.

Зовсім інша картина спостерігатиметься при пошуку сигналу даного класу (близького до еталонного) в пачці детермінованих сигналів. Ступінь відмінності і подібності між досліджуваним у вікні сигналом і сигналом еталонним нормальним фільтром оцінюється після обчислення коефіцієнту трансформант (2) (або гостроти (4)). Тобто при класифікації нормальний фільтр працює як нелінійний.

### Одержані результати

Розглянемо приклад, вибраний, виходячи з простоти ілюстрації та перевірки отриманих результатів. Нехай тестовий сигнал має вигляд четвертої трансформанти перетворення Адамара  $Had(4, t)$  формату  $N = 8$ . Тоді матричний оператор нормального перетворення для тестового сигналу співпа-

дає з матричним оператором дискретного перетворення Адамара ( $\overline{\overline{W}}_{N1} = \overline{\overline{Had}}_8$ ) восьмого порядку. Нехай тепер вікно, яке посувається вздовж осі часу має формат  $M = 8$ . Тоді миттєві значення  $x_{\xi_i}(t)$  згортки імпульсної характеристики погодженого лінійного фільтра з імпульсною характеристикою  $g(t) = \overline{\overline{Had}}(4, t_0 - t)$  матимуть (для кожного  $i$ -го каналу  $i$ -ї трансформанти матриці  $\overline{\overline{W}}_N$ ) вигляд рис. 1.

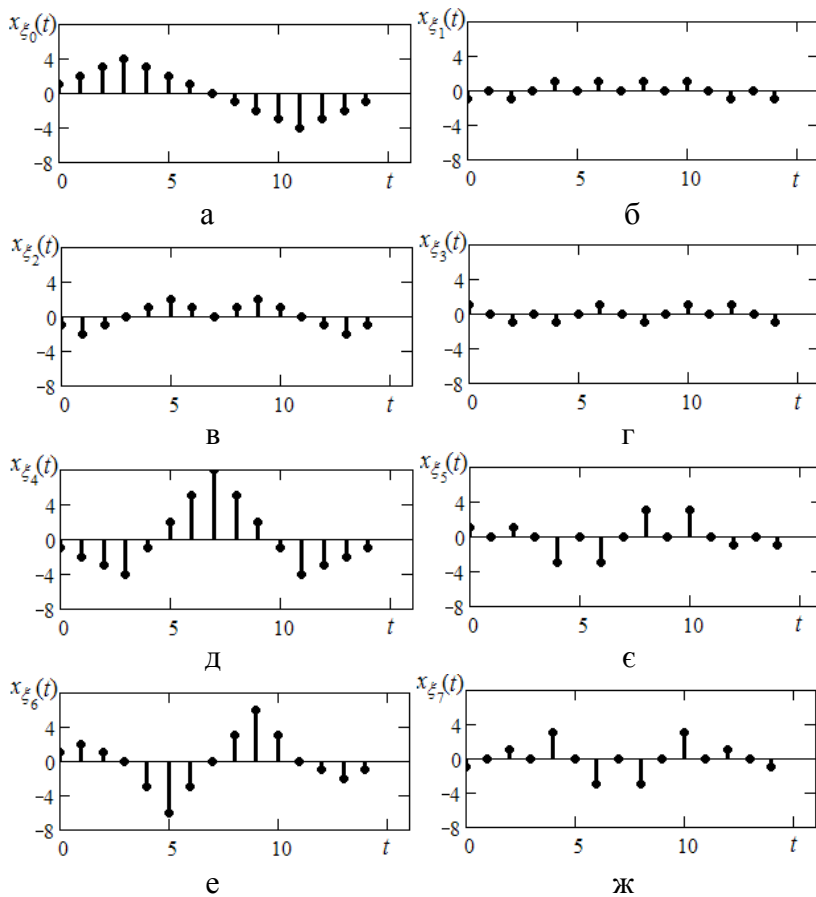


Рис. 1.  
Миттєві значення  
згортки імпульсної  
характеристики  
погодженого лінійного  
фільтра з імпульсною  
характеристикою  
 $g(t) = \overline{\overline{Had}}(4, t_0 - t)$

З рис. 1д видно, що в момент спостереження ( $t = 7$ ) миттєве значення відгуку 4-го каналу фільтра дорівнюватиме  $x_{\xi_4}(t_0) = 8$  і є найбільшим для усіх сигналів (каналів). Якщо тепер взяти два сигнали  $\overline{\overline{Had}}(4, t)$ , то погоджений з таким сигналом фільтр формату  $N = 16$  матиме імпульсну характеристику  $\overline{\overline{Had}}(4, t_0 - t)$  з матриці  $\overline{\overline{W}}_{N2} = \overline{\overline{Had}}_{16}$ , де  $t_0 = 15$ .

Ясно, що в цьому випадку максимальне значення  $\overline{\overline{Had}}(4, 15) = 16$ . При розрахунках для простоти нормуючий множник  $1/\sqrt{N}$  не враховується, оскільки при його врахуванні амплітуда максимуму становитиме  $\sqrt{N}$ , в той час як енергія білого шуму буде зменшуватися в  $\sqrt{N}$  разів (в залежності від формату  $N$ ), тому на співвідношення сигнал/шум нормування не впливає. Миттєві спектри (для моментів часу  $t = 0, \dots, 14$ ) сигналу

$\text{Had}(4, t)$  для матриці  $\overline{W}_N$  восьмого формату наведено на рис. 2.

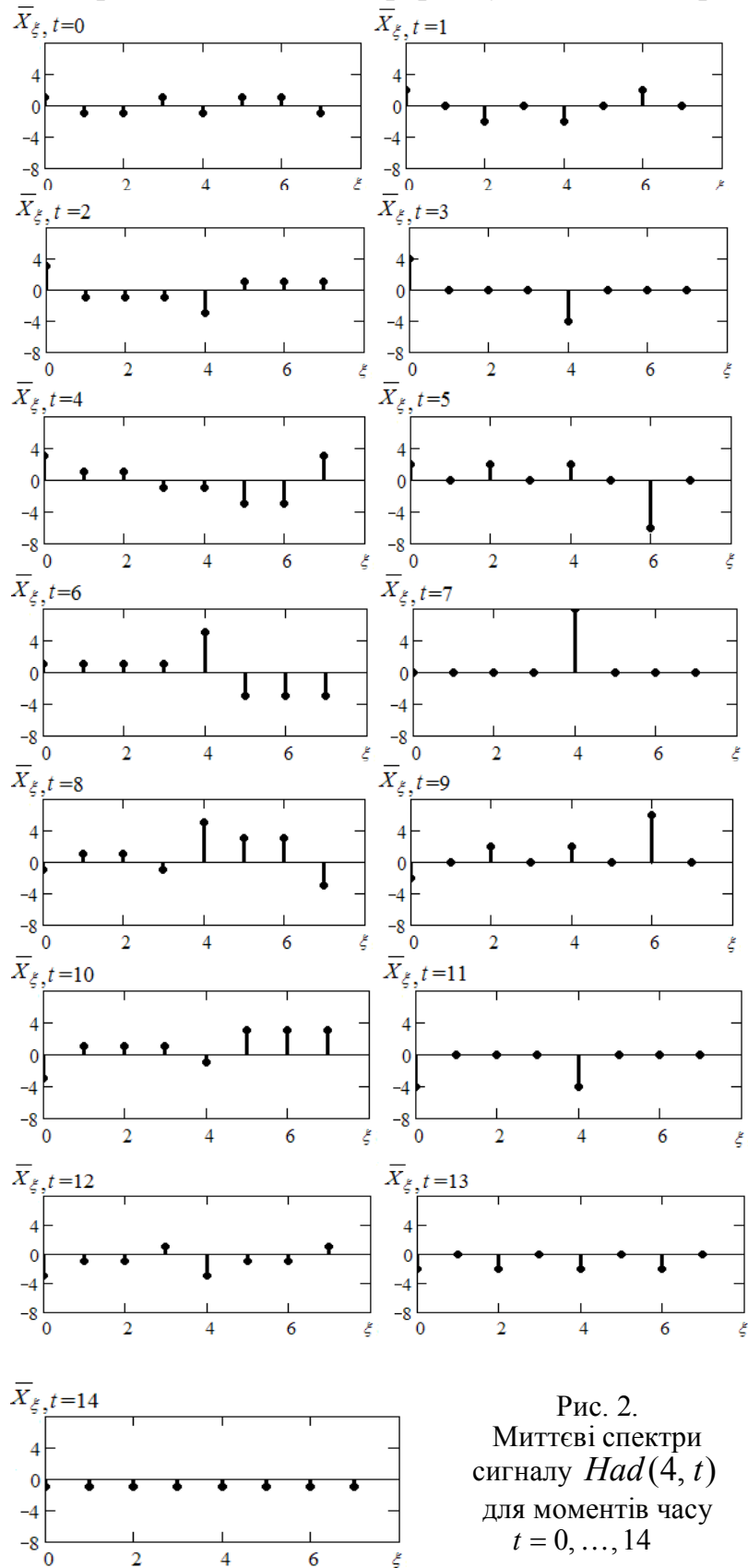


Рис. 2.  
Миттєві спектри  
сигналу  $\text{Had}(4, t)$   
для моментів часу  
 $t = 0, \dots, 14$

На рис. 3 наведена спектрограма оброблення сигналу у вікні формату

$M = 8$ . Спектрограма ілюструє зв'язок між спектральними представленнями в базисі НП (вздовж осі  $\xi$ ) і часовим відгуком (вздовж осі  $t$ ) пачки сигналів, якими є трансформанти

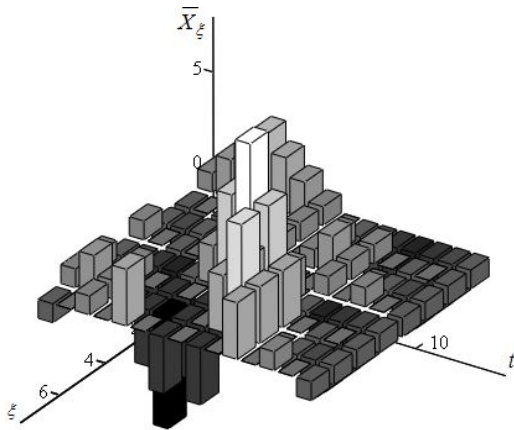


Рис. 3. Спектрограма оброблення сигналу у вікні формату  $M = 8$

перетворення Адамара, на виході фільтра, погодженого з четвертою трансформантою.

На рис. 4а наведено сигнал довільної форми, що представляє собою нормовану компоненту  $\overline{X}_n$  динамічно введеного підпису особи. На рис. 4б наведено математичне очікування реалізації такого сигналу. Нормальний спектр сигналу рис. 4а представлено на рис. 5. Коефі-

цієнт трансформант дорівнює  $K_m = 0,343$ .

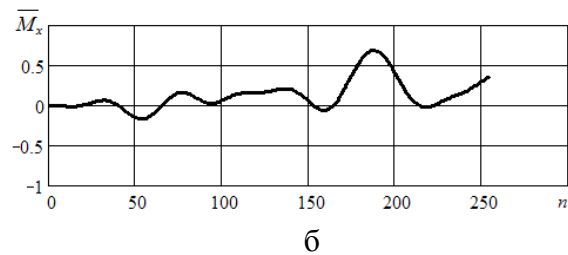
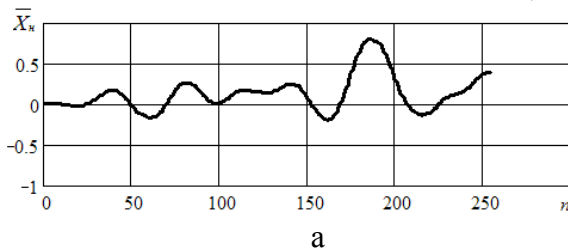


Рис. 4. Сигнал довільної форми (а) та математичне сподівання такого сигналу (б).

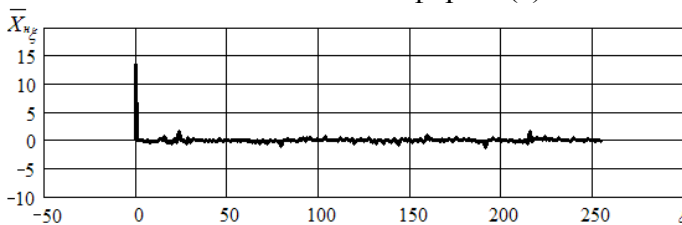
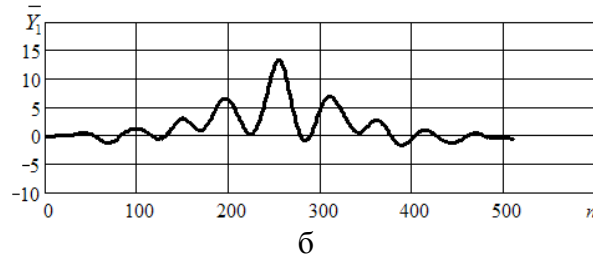
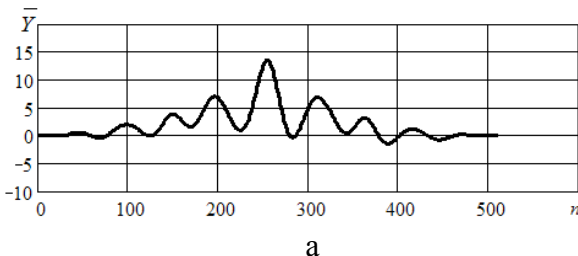


Рис. 5.  
Нормальний спектр сигналу,  
наведеного на рис. 4а.

Часова залежність першої трансформанти сигналу  $\overline{X}_n$  у вікні (відгук лінійного погодженого фільтра) наведено на рис. 6а – 6в з білим шумом при різних значеннях дисперсії шуму  $\sigma = 0$  (а),  $\sigma_1 = 0,1$  (б) та  $\sigma_2 = 1$  (в).



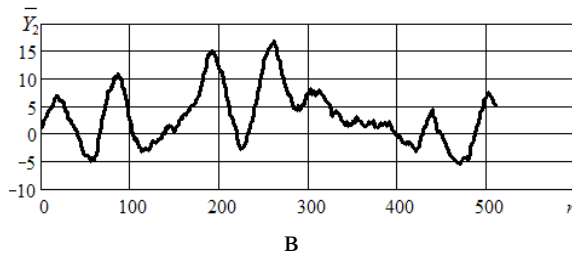


Рис. 6.  
Відгук лінійного погодженого фільтру на  
сигнал рис. 4а при різних значеннях  
дисперсії білого шуму  
 $\sigma = 0$  (а),  $\sigma_1 = 0,1$  (б) та  $\sigma_2 = 1$  (в).

При застосуванні апарату нормальної фільтрації до сигналу рис. 4а коефіцієнт трансформант при різних значеннях дисперсії шуму  $\sigma = 0$ ,  $\sigma_1 = 0,1$  та  $\sigma_2 = 1$  прийматиме значення  $K_m = 0,343$ ,  $K_{m1} = 0,545$  та  $K_{m2} = 4,076$ .

### Висновки

1. Нормальний фільтр дозволяє чисельно оцінювати ступінь подібності/розбіжності між досліджуваним сигналом та сигналом еталонним, що є основним етапом класифікації сигналів.
2. При наявності адитивного шуму високого рівня нормальний фільтр завжди дає велике значення коефіцієнту трансформант.
3. Класичний лінійний погоджений фільтр дозволяє реєструвати наявність (або відсутність) сигналу, близького до еталонного в адитивній суміші з шумом. Але такий фільтр не дозволяє дати чисельну оцінку ступеня подібності/розбіжності замаскованого шумом сигналу до еталону.
4. На відміну від нормального, класичний погоджений фільтр не дозволяє розпізнавати близького до еталонного сигналу і оцінювати ступінь його подібності/розбіжності в послідовності детермінованих сигналів, тобто не може бути використаним для розв'язання задач класифікації (в тих випадках, коли миттєві значення детермінованих сигналів в пачці значно перевищують значення шуканого сигналу).
5. Між нормальним і класичним погодженим фільтром існує жорсткий зв'язок. Нормальний фільтр містить в одному зі своїх каналів (трансформанті матричного оператора дискретного ортогонального нормального перетворення) імпульсну характеристику погодженого фільтра. Відгук цього каналу відповідає значенню реакції погодженого фільтра в момент спостереження.
6. Нормальний та класичний лінійний фільтри інформаційно доповнюють один одного, хоча й призначені для розв'язання різних радіотехнічних задач.

### Література

1. Рибін О.І., Ніжебецька Ю.Х. Нормальне дискретне ортогональне перетворення // Вісник НТУУ "КПІ". Серія Радіотехніка. Радіоапаратуробудування. – 2008. – Вип. 37. – с.8 – 15.
2. Рибін О.І., Ніжебецька Ю.Х., Ткачук А.П., Шарпан О.Б. Нормальне дискретне ортогональне перетворення сигналу довільної форми// Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 4. – с.34 – 40.
3. Ніжебецька Ю.Х., Рибіна О.І., Якубенко О.А. Комплексне дискретне нормальне ортогональне перетворення// Вісник НТУУ "КПІ". Сер. Радіотехніка. Радіоапаратуро-

будування.– 2009.– Вип. 38.– с.5 – 11.

4. Рибін О.І., Сакалош Т.В., Шарпан О.Б. Аналіз пульсограм на базі процедури нормалізації ортогональних перетворень REX //Наукові вісті НТУУ “КПІ”. 2005. №4. с. 29 – 33.

5. Рыбин А.И., Шарпан О.Б., Григоренко Е.Г., Сакалош Т.В. Коэффициенты трансформант нормальных ортогональных преобразований и динамика пульсограмм // Вісник НТУУ “КПІ”. Серія Приладобудування.– 2005.– Вип. 37.– с.148 – 156.

6. Рыбин А.И. , Мельник А.Д. Согласованная нормализованная фильтрация сигналов // Радиоэлектроника.– 2008.– №2. – с.77 – 80. (Изв. высш. учеб. заведений).

7. Абакумов В. Г., Рибін О. І., Сватош Й. Біомедичні сигнали. Генезис, обробка, моніторинг. – К.: Нора-прінт, 2001. – 516 с.

8. Рибін О.І., Ніжебецька Ю.Х. Алгоритм формування матричного оператора дискретного перетворення перетворення // Вісник НТУУ “КПІ”. Серія Радіотехніка. Радіоапаратуробудування.– 2008.– Вип. 37.– с.19 – 27.

9. Финк Л.М. Теория передачи дискретных сообщений. М.: Сов. радио, 1970. 728 с.

10. Рибін О.І., Ткачук А.П. Аналіз лінійних систем в області трансформант перетворення Уолша-Адамара // Вісник НТУУ “КПІ”. Серія Радіотехніка. Радіоапаратуробудування.– 2006.– № 33.– с.14 – 23.

11. Рибін О.І., Ткачук А.П. Аналіз лінійних систем в області трансформант кратного перетворення  $EI\omega AL$  // Вісник НТУУ “КПІ”. Серія Радіотехніка. Радіоапаратуробудування.– 2006.– № 33.– с.31 – 38.

12. Рыбин А.И., Ткачук А.П. Анализ линейных систем в области трансформант собственных частот преобразования  $RTF$ // Радиоэлектроника.– 2006.– № 11.– с.56 – 63. (Изв. высш. учеб. заведений).

*Рибін О.І., Ніжебецька Ю.Х., Рыбина І.О. Погоджена фільтрація: класичний лінійний та нормальний фільтри. Досліджено відмінності та взаємозв'язок класичної лінійної та нормальної погодженої фільтрації при застосуванні цих методів до задачі класифікації.*

**Ключові слова:** класифікація сигналів, ортогональне перетворення, нормальне перетворення, погоджений фільтр, нормальний фільтр.

*Рыбин А.И., Нижебецкая Ю.Х., Рыбина И.А. Согласованная фильтрация: классический линейный и нормальный фильтры. Исследованы различия и взаимосвязь классической линейной и нормальной фильтрации при применении этих методов к задаче классификации.*

**Ключевые слова:** классификация сигналов, ортогональное преобразование, нормальное преобразование, согласованный фильтр, нормальный фильтр.

*Rybin O.I., Nizhebetska Y.Kh., Rybina I.O. Matched filtering: classical linear and normal filters. Distinctions and interconnection of classical linear and normal filtering are researched at application of these methods to the task of classification.*

**Keywords:** classification of signals, orthogonal transform, normal transform, matched filter, normal filter.

УДК621.072.061

## ОСОБЕННОСТИ НАХОЖДЕНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ

*Полях О.И. , Ястребов Н.И.*

Известно, что под резонансом понимают явление резкого возрастания амплитуды колебаний колебательной системы под воздействием внешних